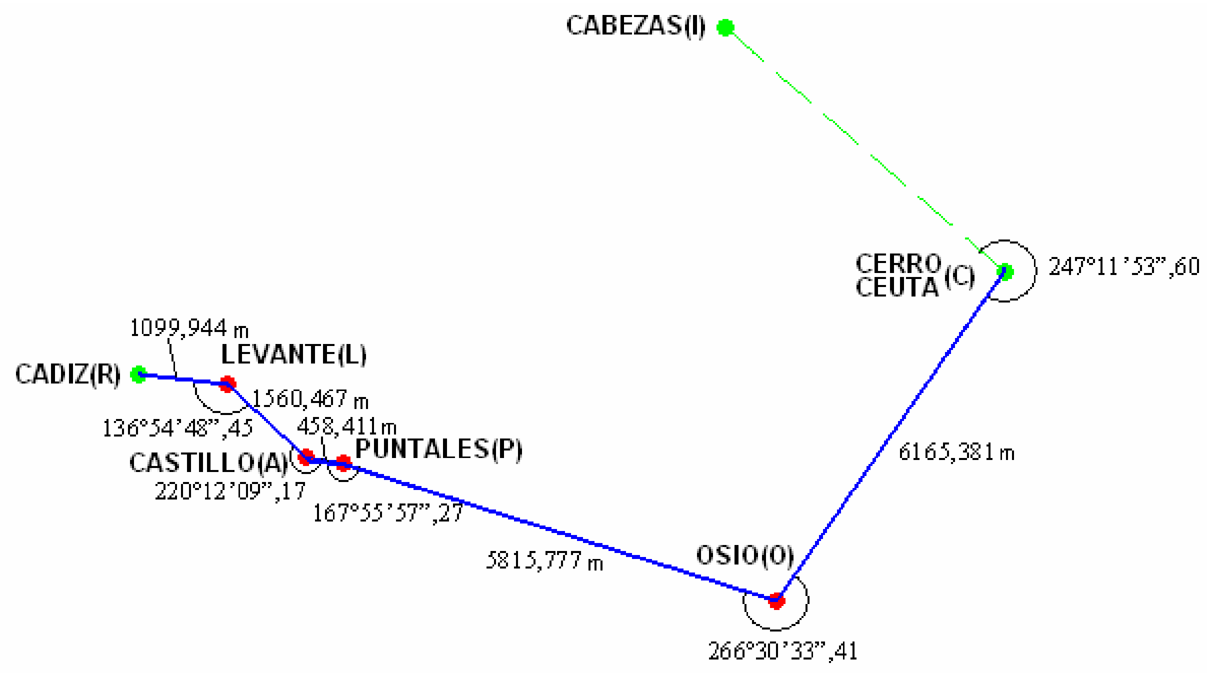
TEMA 6.- TRASLADO DE POSICIONES GEÓGRAFICAS

EJERCICIO 6.1

De acuerdo a los datos proporcionados en el enunciado del problema se puede trazar de forma aproximada el siguiente croquis para la poligonal planteada con indicación del resultado de las medidas efectuadas en el trabajo de campo:



Para abreviar los subíndices a lo largo del problema se asignan las siguientes letras a los siguientes vértices: CABEZAS – I, CERRO CEUTA – C, OSIO – O, PUNTALES – P, CASTILLO – A, LEVANTE – L y CADIZ – R.

Para calcular las coordenadas geodésicas de los nuevos vértices OSIO, PUNTALES, CASTILLO y LEVANTE se deberán seguir los siguientes pasos:

1.- Efectuar un *Problema Inverso* entre los vértices CABEZAS (I) y CERRO CEUTA (C) para obtener la referencia azimutal a partir de la cual se ha medido el primer ángulo *ICO* (su valor siempre se da medido hacia la derecha con respecto a la inicial). Como resultado de la resolución de este *Problema Inverso* se obtendrá el acimut Z_{CI}.

Este *Problema Inverso* se resolverá de acuerdo a lo estudiado en el tema anterior. Eligiendo el *método algebraico* para el cálculo, teniendo en cuenta que se trata del sistema geodésico

ED50 (*a = 6.378.388 m*, *f = 1/297*) y utilizando como datos las coordenadas de los dos vértices CABEZAS (I) y CERRO CEUTA (C), se obtiene como resultado:

$$Z_{CI} = 321^o\,25'\,31{,}4040'' \text{ (sexag.)}$$

2.- Se suma el acimut Z_{CI} obtenido con el ángulo *ICO* resultado de la medida de campo. De esta manera se obtiene el acimut Z_{CO} que es el ángulo que determina la dirección en la que se encuentra el vértice OSIO (O) tomando como referencia la dirección norte en el vértice CERRO CEUTA (C):

$$Z_{CO} = Z_{CI} + ICO = 321^o\,25'\,31{,}4040'' + 247^o\,11'\,53{,}60'' = 568^o\,37'\,25{,}0040'' = 208^o\,37'\,25{,}0040''$$

3.- Se resuelve un *Problema Directo* tomando como punto de partida las coordenadas del vértice CERRO CEUTA (C) para obtener las coordenadas del vértice OSIO(O) empleando el acimut Z_{CO} y la distancia medida *CO*. Además se obtendrá el acimut inverso Z_{OC}:

$$OSIO\,(O)\begin{cases}\varphi = 36^o 29'\,12{,}5768''\,N\\ \lambda = 06^o 11'\,47{,}4087''\,W\end{cases} \qquad Z_{OC} = 28^o\,36'\,14{,}4061'' \text{ (sexag.)}$$

4.- Con este acimut Z_{OC} recién calculado y el ángulo *COP* medido con estación en OSIO (O) se obtiene el acimut Z_{OP} que determina la dirección del vértice PUNTALES (P) desde OSIO (O):

$$Z_{OP} = Z_{OC} + COP = 28^o\,36'\,14{,}4061'' + 266^o\,30'\,33{,}41'' = 295^o\,06'\,47{,}8161''$$

5.- Por tanto, se vuelve a estar en condiciones de realizar un nuevo *Problema Directo*, esta vez desde OSIO (O) para obtener las coordenadas del vértice PUNTALES (P). Esto es posible ya que se conocen, del paso 3 y 4, las coordenadas de OSIO (O) y el acimut Z_{OP}, así como la distancia medida *OP* que es dato del problema. Además se obtendrá el acimut inverso Z_{PO}:

$$PUNTALES\,(P)\begin{cases}\varphi = 36^o 30'\,32{,}5975''\,N\\ \lambda = 06^o 15'\,19{,}0259''\,W\end{cases} \qquad Z_{PO} = 115^o\,04'\,41{,}9475'' \text{ (sexag.)}$$

6.- De la misma forma realizando estos mismos cálculos sucesivamente para cada uno de los vértices se obtienen:

$$Z_{PA} = Z_{PO} + OPA = 115^o\,04'\,41{,}9475'' + 167^o\,55'\,57{,}27'' = 283^o\,00'\,39{,}2175''$$

$$CASTILLO\,(A)\begin{cases}\varphi = 36^o 30'\,35{,}9452''\,N\\ \lambda = 06^o 15'\,36{,}9746''\,W\end{cases} \qquad Z_{AP} = 103^o\,00'\,28{,}5388'' \text{ (sexag.)}$$

$$Z_{AL} = Z_{AP} + PAL = 103^o\,00'\,28{,}5388'' + 220^o\,12'\,09'',17 = 323^o\,12'\,37{,}7088''$$

$$LEVANTE\,(L)\begin{cases}\varphi = 36^o 31'\,16{,}4843''\,N\\ \lambda = 06^o 16'\,14{,}5349''\,W\end{cases} \qquad Z_{LA} = 143^o\,12'\,15{,}3588'' \text{ (sexag.)}$$

$$\boldsymbol{Z_{LR}} = \boldsymbol{Z_{LA}} + ALR = 143^o\,12'\,15{,}3588'' + 136^o\,54'\,48'',45 = 280^o\ 07'\,03{,}8088''$$

$$CADIZ\ (R)\begin{cases}\varphi = 36^o 31'\,22{,}7506''\ N\\ \lambda = 06^o 16'\,58{,}0571''\ W\end{cases}$$

En este último caso el acimut $\boldsymbol{Z_{RL}}$ no interesa ya que no será empelado al haberse obtenido ya las coordenadas del vértice de recalada CADIZ (R).

7.- Una vez obtenidas las coordenadas del vértice de recalada se han de comparar con las reales correspondientes al mismo vértice y comprobar si la diferencia entre ellas está dentro de tolerancia. Consideremos que el *error de recalada* máximo permitido para la poligonal sea de 0,02” tanto para la latitud como para la longitud.

De esta comparación se obtienen unas diferencias de:

$$CÁDIZ\begin{cases}\varphi = 36^o 31' 22'',7672 N\\ \lambda = 06^o 16' 58'',0379 W\end{cases} \qquad CADIZ\ (R)\begin{cases}\varphi = 36^o 31'\,22{,}7506''\ N\\ \lambda = 06^o 16'\,58{,}0571''\ W\end{cases}$$

$$\Delta\varphi = 0{,}0166'' \langle\ 0{,}02'' \qquad \Delta\lambda = -\,0{,}0192'' \langle\ 0{,}02''$$

Lo cual nos indica que el cierre de la poligonal está dentro de tolerancia y se puede proceder a su compensación.

8.- Tal como se indica en el texto, para la compensación de la poligonal se efectuará un reparto proporcional del *error de recalada* según la longitud de cada uno de los tramos que la componen. Para ello se procederá primero a calcular el porcentaje de cada uno de los tramos en relación a la longitud total:

L = 6165,381 + 5815,777 + 458,411 + 1560,467 + 1099,944 = 15099,980 m

CO = 6165,381 : 15099,980 = 40,83%
COP = (6165,381 + 5815,777) : 15099,980 = 79,35%
COPA = (6165,381 + 5815,777 + 0458,411) : 15099,980 = 82,38%
COPAL = (6165,381 + 5815,777 + 0458,411 + 1560,467) : 15099,980 = 92,72%
COPALR = (6165,381 + 5815,777 + 0458,411 + 1560,467 + 1099,944) : 15099,980 = 100%

Una vez hallados estos porcentajes se procede a calcular la parte del error de recalada que le corresponde a cada uno de ellos, tanto para la latitud como para la longitud:

	Latitud	Longitud
OSIO	$\Delta\varphi_1 = 0{,}0166 \cdot 0{,}4083 = 0{,}0068''$	$\Delta\lambda_1 = -\,0{,}0192 \cdot 0{,}4083 = -\,0{,}0078''$
PUNTALES	$\Delta\varphi_2 = 0{,}0166 \cdot 0{,}7935 = 0{,}0132''$	$\Delta\lambda_2 = -\,0{,}0192 \cdot 0{,}7935 = -\,0{,}0152''$
CASTILLO	$\Delta\varphi_3 = 0{,}0166 \cdot 0{,}8238 = 0{,}0137''$	$\Delta\lambda_3 = -\,0{,}0192 \cdot 0{,}8238 = -\,0{,}0158''$
LEVANTE	$\Delta\varphi_4 = 0{,}0166 \cdot 0{,}9272 = 0{,}0154''$	$\Delta\lambda_4 = -\,0{,}0192 \cdot 0{,}9272 = -\,0{,}0178''$
CADIZ	$\Delta\varphi_5 = 0{,}0166 \cdot 1{,}0000 = 0{,}0166''$	$\Delta\lambda_5 = -\,0{,}0192 \cdot 1{,}0000 = -\,0{,}0192''$

Ya solo queda sumar o restar a las coordenadas obtenidas para cada vértice en los apartados 3, 5 y 6 estos incrementos que se acaban de calcular y se obtendrán las coordenadas definitivas para cada uno de ellos:

$$OSIO\,(O)\begin{cases}\varphi = 36^o 29' \, 12{,}5836'' \, N \\ \lambda = 06^o 11' \, 47{,}4009'' \, W\end{cases} \qquad PUNTALES\,(P)\begin{cases}\varphi = 36^o 30' \, 32{,}6107'' \, N \\ \lambda = 06^o 15' \, 19{,}0107'' \, W\end{cases}$$

$$CASTILLO\,(A)\begin{cases}\varphi = 36^o 30' \, 35{,}9589'' \, N \\ \lambda = 06^o 15' \, 36{,}9588'' \, W\end{cases} \qquad LEVANTE\,(L)\begin{cases}\varphi = 36^o 31' \, 16{,}4997'' \, N \\ \lambda = 06^o 16' \, 14{,}5171'' \, W\end{cases}$$

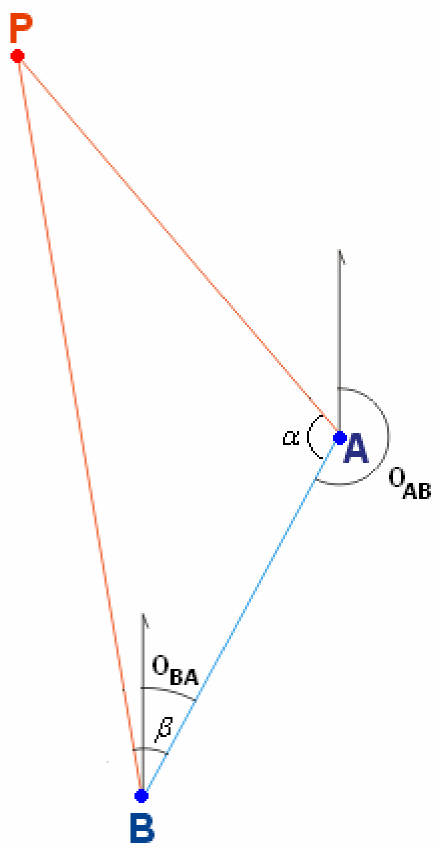
EJERCICIO 6.2

$$\left.\begin{aligned} X_{BA} &= X_B - X_A = 448.000 - 450.000 = -2.000 \\ Y_{BA} &= Y_B - Y_A = 376.000 - 380.000 = -4.000 \end{aligned}\right\} \quad tan\,O_{AB} = \frac{X_{BA}}{Y_{BA}} = \frac{-2.000}{-4.000} = 0{,}5$$

$$\left.\begin{cases} tan\,O_{AB} > 0 \\ X_{BA} < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad O_{AB} = 206^o \;\; 33' \; 54{,}18''$$

para obtener la orientación inversa O_{BA} se sumará 180^o a O_{AB}: $\qquad O_{BA} = 26^o \, 33' \, 54{,}18''$

$$O_{AP} = O_{AB} + \alpha \; = \; 206^o \, 33' \, 54{,}18'' + 123^o \, 32' \, 10'' \; = \; 330^o \, 06' \, 04{,}18''$$
$$O_{BP} = O_{BA} + \beta \; = \; 26^o \, 33' \, 54{,}18'' + (-\,28^o \, 42' \, 47'') = \; 357^o \, 51' \, 07{,}18''$$



$$X_{PA} = \frac{X_{BA}\ \cot O_{BP} - Y_{BA}}{\cot O_{BP} - \cot O_{AP}} = \frac{-2.000 \cdot (26{,}66144605\ ) - (-4.000)}{-26{,}66144605 - (-1{,}739134856)} = \frac{57.322{,}8921}{-24{,}92231119} = -2.300{,}063$$

$$Y_{PA} = X_{PA}\ \cot O_{AP} = -2.300{,}063 \cdot (-1{,}739134856) = 4.000{,}120$$

$$X_P = X_A + X_{PA} = 450.000 + (-2.300{,}063) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_P = 447.699{,}937}$$

$$Y_P = Y_A + Y_{PA} = 380.000 + 4.000{,}120 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_P = 384.000{,}120}$$

$$X_{BP} = X_B - X_P = 448.000 - 447.699{,}937 = 300{,}063$$

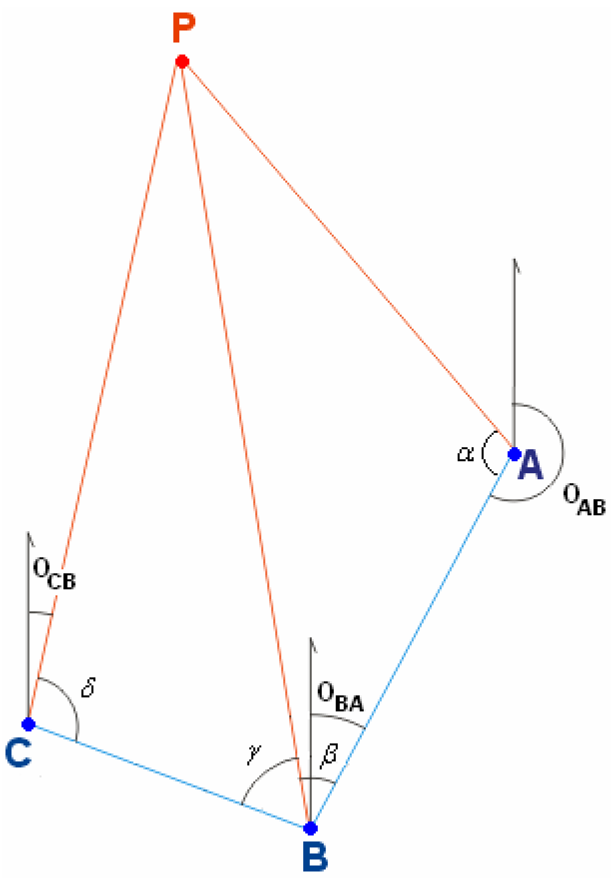
$$Y_{BP} = Y_B - Y_P = 376.000 - 384.000{,}120 = -8.000{,}120$$

$$AP = \sqrt{X_{PA}^{\ 2} + Y_{PA}^{\ 2}} = \sqrt{5.290.289{,}804 + 16.000.960{,}014} \quad \Rightarrow \quad \boxed{AP = 4.614{,}244\ m}$$

$$BP = \sqrt{X_{BP}^{\ 2} + Y_{BP}^{\ 2}} = \sqrt{90.037{,}804 + 64.001.920{,}014} \quad \Rightarrow \quad \boxed{BP = 8.005{,}745\ m}$$

EJERCICIO 6.3

$$\left.\begin{array}{l} X_{CB} = X_C - X_B = 446.000 - 448.000 = -2.000 \\ Y_{CB} = Y_C - Y_B = 377.000 - 376.000 = 1.000 \end{array}\right\} \quad \tan O_{BC} = \frac{X_{CB}}{Y_{CB}} = \frac{-2.000}{1.000} = -2$$



$$\left.\begin{cases} \tan O_{BC} < 0 \\ X_{CB} < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad O_{BC} = 296^o\ 33'\ 54{,}18''$$

para obtener la orientación inversa O_{CB} se sumará 180^o a O_{BC}: $O_{CB} = 116^o\ 33'\ 54{,}18''$

$$O_{BP} = O_{BC} + \gamma = 296^o\,33'\,54{,}18'' + 61^o\,17'\,14'' = 357^o\,51'\,08{,}18''$$
$$O_{CP} = O_{CB} + \delta = 116^o\,33'\,54{,}18'' + (-102^o\,54'\,53'') = 13^o\,39'\,01{,}18''$$

$$X_{PB} = \frac{X_{CB}\ \cot O_{CP} - Y_{CB}}{\cot O_{CP} - \cot O_{BP}} = \frac{-2.000 \cdot (4{,}117675687) - 1.000}{4{,}117675687 - (-26{,}66489756)} = \frac{-9.235{,}351374}{30{,}78257325} = -300{,}019$$

$$Y_{PB} = X_{PB}\ \cot O_{BP} = -300{,}019 \cdot (-26{,}66489756) = 7.999{,}971$$

$$X_P = X_B + X_{PB} = 448.000 + (-300{,}019) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_P = 447.699{,}981}$$

$$Y_P = Y_B + Y_{PB} = 376.000 + 7.999{,}971 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_P = 383.999{,}971}$$

$$X_{CP} = X_C - X_P = 446.000 - 447.699{,}981 = -1.699{,}981$$

$$Y_{CP} = Y_C - Y_P = 377.000 - 383.999{,}971 = -6.999{,}971$$

$$CP = \sqrt{X_{CP}^{\ 2} + Y_{CP}^{\ 2}} = \sqrt{2.889.935{,}400 + 48.999.594{,}001} \quad \Rightarrow \quad \boxed{CP = 7.203{,}434\ m}$$
$$BP = \sqrt{X_{BP}^{\ 2} + Y_{BP}^{\ 2}} = \sqrt{90.011{,}400 + 63.999.536{,}001} \quad \Rightarrow \quad \boxed{BP = 8.005{,}595\ m}$$

Con los datos del problema anterior y los obtenidos en éste, se obtienen valores redundantes para las coordenadas del punto P y para la distancia BP. Por tanto, si se mantienen las diferencias dentro de un margen de error prefijado los valores definitivos de estos valores redundantes serán la media aritmética de ellos. Así:

$$\boxed{\text{Coordenadas de } P \begin{cases} X = 447.699{,}959 \\ Y = 384.000{,}046 \end{cases}} \qquad \boxed{BP = 8.005{,}670\ m}$$

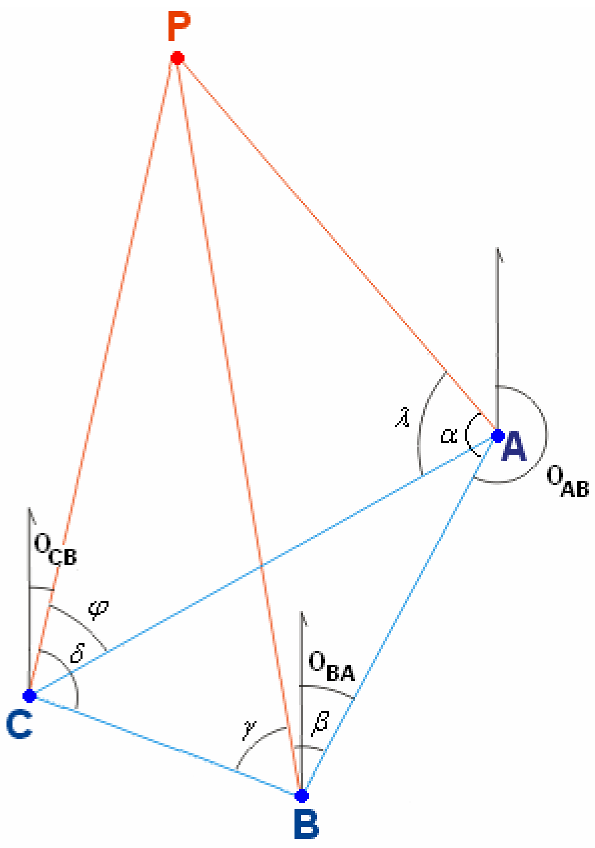
EJERCICIO 6.4

$$\left.\begin{array}{l} X_{CA} = X_C - X_A = 446.000 - 450.000 = -4.000 \\ Y_{CA} = Y_C - Y_A = 377.000 - 380.000 = -3.000 \end{array}\right\} \quad \tan O_{AC} = \frac{X_{CA}}{Y_{CA}} = \frac{-4.000}{-3.000} = \frac{4}{3}$$

$$\left.\begin{cases} \tan O_{AC} > 0 \\ X_{CA} < 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \quad O_{AC} = 233^o\ 07'\ 48{,}37''$$

para obtener la orientación inversa O_{CA} se sumará 180^o a O_{AC}: $O_{CA} = 53^o\ 07'\ 48{,}37''$

$$O_{AP} = O_{AC} + \lambda = 233^o\,07'\,48{,}37'' + 96^o\,58'\,16'' = 330^o\,06'\,04{,}37''$$
$$O_{CP} = O_{CA} + \varphi = 53^o\,07'\,48{,}37'' + (-39^o\,28'\,47'') = 13^o\,39'\,01{,}37''$$



$$X_{PA} = \frac{X_{CA}\ \cot O_{CP} - Y_{CA}}{\cot O_{CP} - \cot O_{AP}} = \frac{-4.000 \cdot (4{,}117659147) - (-3.000)}{-4{,}117659147 - (-1{,}739138564)} = \frac{-13.470{,}63659}{5{,}856797711} = -2.300{,}000$$

$$Y_{PA} = X_{PA}\ \cot O_{AP} = -2.300{,}000 \cdot (-1{,}739138564) = 4.000{,}019$$

$$X_P = X_A + X_{PA} = 450.000 + (-2.300{,}000) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X_P = 447.700{,}000}$$

$$Y_P = Y_A + Y_{PA} = 380.000 + 4.000{,}019 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Y_P = 384.000{,}019}$$

$$X_{CP} = X_C - X_P = 446.000 - 447.700{,}000 = -1.700{,}000$$

$$Y_{CP} = Y_C - Y_P = 377.000 - 384.000{,}019 = -7.000{,}019$$

$$CP = \sqrt{X_{CP}^2 + Y_{CP}^2} = \sqrt{2.890.000 + 49.000.266} \quad \Rightarrow \quad \boxed{CP = 7.203{,}490\ m}$$

$$AP = \sqrt{X_{PA}^2 + Y_{PA}^2} = \sqrt{5.290.000 + 16.000.152} \quad \Rightarrow \quad \boxed{AP = 4.614{,}125\ m}$$

Con los datos de los problemas anteriores y los obtenidos en éste, se obtienen tres valores redundantes para las coordenadas del punto P y dos para cada una de las tres distancias AP, BP y CP. Por tanto, si se mantienen las diferencias dentro de un margen de error prefijado los valores definitivos de estos valores redundantes serán la media aritmética de ellos. Así:

$$\boxed{\text{Coordenadas de } P \begin{cases} X = 447.699{,}973 \\ Y = 384.000{,}037 \end{cases}} \qquad \boxed{AP = 4.614{,}185\ m} \qquad \boxed{BP = 8.005{,}670\ m} \qquad \boxed{CP = 7.203{,}462\ m}$$