

## TEMA 5.- PROBLEMAS GEODÉSICOS PRINCIPALES

### EJERCICIO 5.1

$$\varepsilon^{\circ} = A + B + C - 180^{\circ} = 184^{\circ} - 180^{\circ} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^{\circ} = 4^{\circ}}$$

$$\varepsilon^r = \varepsilon^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow \boxed{\varepsilon^r = 0,0698}$$

$$\varepsilon'' = \varepsilon^{\circ} \cdot 3600 \Rightarrow \boxed{\varepsilon'' = 14.400''}$$

$$T = \varepsilon^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow \boxed{T = 0,0689 u^2}$$

$$S = \frac{720^{\circ}}{\varepsilon^{\circ}} T = \frac{720^{\circ}}{\varepsilon^{\circ}} \varepsilon^{\circ} \frac{\pi}{180^{\circ}} \Rightarrow \boxed{S = 4\pi u^2}$$

### EJERCICIO 5.2

$$A' = 80^{\circ} - \frac{\varepsilon^{\circ}}{3} = 80^{\circ} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{A' = 78,6^{\circ}}$$

$$B' = 48^{\circ} - \frac{\varepsilon^{\circ}}{3} = 48^{\circ} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{B' = 46,6^{\circ}}$$

$$C' = 56^{\circ} - \frac{\varepsilon^{\circ}}{3} = 56^{\circ} - \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{C' = 54,6^{\circ}}$$

### EJERCICIO 5.3

#### Cálculo de las coordenadas de A y Z<sub>AP</sub>

1.- Mediante los parámetros  $a$  y  $f$  del elipsoide *WGS84*, se calcularán el valor de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide  $e$  y  $e'$  (2-6),  $N_P$  (2-13),  $\rho_P$  (2-20) y  $R_{Z(PA)}$  (2-33):

$$(2-6) \quad e^2 = f(2-f) = 0,0066943800 \quad e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} = \frac{f(2-f)}{1-f(2-f)} = 0,0067394967$$

$$(2-13) \quad N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1+f(f-2)\operatorname{sen}^2 \varphi_P}} \quad \begin{cases} W_P = 0,9987869746 \text{ m} \\ W_P^3 = 0,9963653363 \text{ m} \\ N_P = 6.385.883,239 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2-20) \quad \rho_P = \frac{a(1-e^2)}{W_P^3} = \frac{a(f^2-2f+1)}{W_P^3} \quad \rho_P = 6.358.550,520 \text{ m}$$

$$(2-33) \quad R_{Z(PA)} = \frac{N_P \rho_P}{\rho_P \operatorname{sen}^2 Z_{PA} + N_P \operatorname{cos}^2 Z_{PA}} \quad R_{z(PA)} = 6.372.187,570 \text{ m}$$

2.- Con estos valores, más el acimut  $Z_{PA}$ , la distancia  $s$  y la latitud  $\varphi_P$ , se determinan las componentes del vector  $P\vec{A}_{(t)}$  referidas al sistema de las direcciones principales de  $\mathbf{P}$ :

$$(5-14) \quad P\vec{A}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \operatorname{cos} Z_{PA} - \frac{s^3 \operatorname{cos} Z_{PA}}{6R_{Z(PA)} \rho_P} + \dots \\ s \cdot \operatorname{sen} Z_{PA} - \frac{s^3 \operatorname{sen} Z_{PA}}{6R_{Z(PA)} N_P} + \dots \\ \frac{s^2}{2R_{Z(PA)}} - \frac{s^3}{4R_{Z(PA)} N_P} e'^2 \operatorname{sen} 2\varphi_P \operatorname{cos} Z_{PA} + \dots \end{bmatrix} \quad P\vec{A}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 35.354,975 \\ 35.354,977 \\ 196,161 \end{bmatrix}$$

3.- Se calculan las coordenadas cartesianas de  $\mathbf{P}$ , a partir de  $(\varphi_P, \lambda_P)$  y  $h = 0$ , con (5-17):

$$(5-17) \quad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_P \operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{cos} \lambda_P \\ N_P \operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{sen} \lambda_P \\ N_P (1-e^2) \operatorname{sen} \varphi_P \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586,104 \\ -444.493,688 \\ 3.817.393,160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto  $\mathbf{A}$  mediante la expresión (4-10):

$$(4-10) \quad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} \varphi_P \operatorname{cos} \lambda_P & -\operatorname{sen} \lambda_P & -\operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{cos} \lambda_P \\ -\operatorname{sen} \varphi_P \operatorname{sen} \lambda_P & \operatorname{cos} \lambda_P & -\operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{sen} \lambda_P \\ \operatorname{cos} \varphi_P & 0 & -\operatorname{sen} \varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.062.315,238 \\ -407.405,167 \\ 3.845.510,846 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las coordenadas geodésicas de  $\mathbf{A}$   $(\varphi_A, \lambda_A)$ , mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas  $(X_A, Y_A, Z_A)$ :

$$\varphi_A = \arctan \frac{Z_A}{(1-e^2) \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_A = 37^\circ 19' 04'' 45152 \text{ N}}$$

$$\lambda_A = \arctan \frac{Y_A}{X_A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_A = 004^\circ 36' 04'' 08693 \text{ W}}$$

6.- Se halla el *acimut*  $Z_A$  de la geodésica que parte de **P**, en el punto **A**, con (5-19) y (5-20):

$$(5-19) \quad \text{sen}Z_A = \frac{N_P \cos \varphi_P \text{sen}Z_{PA}}{N_A \cos \varphi_A} = 0,7100738851 \quad Z_A = 45^\circ 14' 27'',338$$

$$(5-20) \quad \text{sen}Z_A > 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PA} < 90^\circ \quad \rightarrow \quad Z_A = Z_A \quad Z_A = 45^\circ 14' 27'',338$$

7.- Se calcula el acimut inverso  $Z_{AP}$ , mediante la sencilla operación:

$$(5-21) \quad Z_{AP} = Z_A \pm 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{AP} = 225^\circ 14' 27'',338}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos*  $\Delta Z$ , mediante la expresión:

$$(5-22) \quad \Delta Z = Z_A - Z_{PA} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta Z = 0^\circ 14' 27'',338}$$

**Cálculo de las coordenadas de B y  $Z_{BP}$ .**

1.- Los valores de la *primera y segunda excentricidad* del elipsoide  $e$  y  $e'$  serán los mismos que en el caso anterior:

$$(2-6) \quad e^2 = 0,0066943800 \quad e'^2 = 0,0067394967$$

Los valores de  $N_P$  (2-13),  $\rho_P$  (2-20) y  $R_{Z(PB)}$  (2-33), se obtienen de igual forma que en el caso anterior:

$$(2-13) \quad N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \text{sen}^2 \varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1 + f(f-2)\text{sen}^2 \varphi_P}} \quad \begin{cases} W_P = 0,9987869746 \text{ m} \\ W_P^3 = 0,9963653363 \text{ m} \\ N_P = 6.385.883,239 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2-20) \quad \rho_P = \frac{a(1 - e^2)}{W_P^3} = \frac{a(f^2 - 2f + 1)}{W_P^3} \quad \rho_P = 6.358.550,520 \text{ m}$$

$$(2-33) \quad R_{Z(PB)} = \frac{N_P \rho_P}{\rho_P \text{sen}^2 Z_{PB} + N_P \cos^2 Z_{PB}} \quad R_{z(PB)} = 6.372.187,570 \text{ m}$$

2.- Con estos valores, más el acimut  $Z_{PB}$ , la distancia  $s$  y la latitud  $\varphi_P$ , se determinan las componentes del vector  $P\vec{B}_{(t)}$  referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

$$(5-14) \quad P\bar{B}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \cos Z_{PB} - \frac{s^3 \cos Z_{PB}}{6R_{Z(PB)} \rho_P} + \dots \\ s \cdot \text{sen} Z_{PB} - \frac{s^3 \text{sen} Z_{PB}}{6R_{Z(PB)} N_P} + \dots \\ \frac{s^2}{2R_{Z(PB)}} - \frac{s^3}{4R_{Z(PB)} N_P} e'^2 \text{sen} 2\varphi_P \cos Z_{PB} + \dots \end{bmatrix} \quad P\bar{B}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.354,975 \\ 35.354,977 \\ 196,168 \end{bmatrix}$$

3.- Se calculan las coordenadas cartesianas de **P**, a partir de  $(\varphi_P, \lambda_P)$  y  $h = 0$ , con (5-17), que ya se han obtenido en el caso anterior:

$$(5-17) \quad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586,104 \\ -444.493,688 \\ 3.817.393,160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **B** mediante la expresión (4-10):

$$(4-10) \quad \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\text{sen}\varphi_P \cos \lambda_P & -\text{sen}\lambda_P & -\cos \varphi_P \cos \lambda_P \\ -\text{sen}\varphi_P \text{sen}\lambda_P & \cos \lambda_P & -\cos \varphi_P \text{sen}\lambda_P \\ \cos \varphi_P & 0 & -\text{sen}\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.104.707,612 \\ -411.114,019 \\ 3.789.039,364 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **B**  $(\varphi_B, \lambda_B)$ , mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas  $(X_B, Y_B, Z_B)$ :

$$\varphi_B = \arctan \frac{Z_A}{(1-e^2)\sqrt{X_A^2 + Y_A^2}} \Rightarrow \boxed{\varphi_B = 36^\circ 40' 50'' 70175 \text{ N}}$$

$$\lambda_B = \arctan \frac{Y_A}{X_A} \Rightarrow \boxed{\lambda_B = 004^\circ 36' 16'' 01838 \text{ W}}$$

6.- Se halla el *acimut*  $Z_B$  de la geodésica que parte de **P**, en el punto **B**, con (5-19) y (5-20):

$$(5-19) \quad \text{sen} Z_B = \frac{N_P \cos \varphi_P \text{sen} Z_{PB}}{N_B \cos \varphi_B} = 0,7041737515 \quad Z_B = 44^\circ 45' 46'',193$$

$$(5-20) \quad \text{sen} Z_B > 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PB} > 90^\circ \quad \rightarrow \quad Z_B = 180^\circ - Z_B \quad Z_B = 135^\circ 14' 13'',807$$

7.- Se calcula el acimut inverso  $Z_{BP}$ , mediante la sencilla operación:

$$(5-21) \quad Z_{BP} = Z_B \pm 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{BP} = 315^\circ 14' 13'' 807}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos*  $\Delta Z$ , mediante la expresión:

$$(5-22) \quad \Delta Z = Z_B - Z_{PB} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta Z = 0^\circ 14' 13'' 807}$$

**Cálculo de las coordenadas de C y Z<sub>CP</sub>.**

1.- Los valores de la *primera y segunda excentricidad* del elipsoide *e* y *e'* serán los mismos:

$$(2-6) \quad e^2 = 0,0066943800 \quad e'^2 = 0,0067394967$$

Los valores de *N<sub>P</sub>* (2-13), y *ρ<sub>P</sub>* (2-20) son los mismos que en los dos casos anteriores:

$$(2-13) \quad \begin{cases} W_P = 0,9987869746 \text{ m} \\ W_P^3 = 0,9963653363 \text{ m} \\ N_P = 6.385.883,239 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2-20) \quad \rho_P = 6.358.550,520 \text{ m}$$

El valor de *R<sub>Z(PC)</sub>* (2-33), se obtiene de forma similar que en los casos anteriores, y ha de coincidir con el del caso anterior:

$$(2-33) \quad R_{Z(PC)} = \frac{N_P \rho_P}{\rho_P \text{sen}^2 Z_{PC} + N_P \text{cos}^2 Z_{PC}} \quad R_{z(PC)} = 6.372.187,570 \text{ m}$$

2.- Con estos valores, más el acimut *Z<sub>PC</sub>*, la distancia *s* y la latitud *φ<sub>P</sub>*, se determinan las componentes del vector *PC<sub>(t)</sub>* referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

$$(5-14) \quad \vec{PC}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \text{cos} Z_{PC} - \frac{s^3 \text{cos} Z_{PC}}{6 R_{Z(PC)} \rho_P} + \dots \\ s \cdot \text{sen} Z_{PC} - \frac{s^3 \text{sen} Z_{PC}}{6 R_{Z(PC)} N_P} + \dots \\ \frac{s^2}{2 R_{Z(PC)}} - \frac{s^3}{4 R_{Z(PC)} N_P} e'^2 \text{sen} 2\varphi_P \text{cos} Z_{PC} + \dots \end{bmatrix} \quad \vec{PC}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.354,975 \\ -35.354,977 \\ 196,168 \end{bmatrix}$$

3.- Las coordenadas cartesianas de **P** se calculan a partir de (*φ<sub>P</sub>*, *λ<sub>P</sub>*) y *h = 0*, con (5-17), como en los casos anteriores:

$$(5-17) \quad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586,104 \\ -444.493,688 \\ 3.817.393,160 \end{pmatrix}$$

4.- Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **C** mediante la expresión (4-10):

$$(4-10) \quad \begin{pmatrix} X_C \\ Y_C \\ Z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi_P \cos \lambda_P & -\operatorname{sen}\lambda_P & -\cos \varphi_P \cos \lambda_P \\ -\operatorname{sen}\varphi_P \operatorname{sen}\lambda_P & \cos \lambda_P & -\cos \varphi_P \operatorname{sen}\lambda_P \\ \cos \varphi_P & 0 & -\operatorname{sen}\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.098.544,833 \\ -481.554,901 \\ 3.789.039,364 \end{pmatrix}$$

5.- Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **C** ( $\varphi_C, \lambda_C$ ), mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas ( $X_C, Y_C, Z_C$ ):

$$\varphi_C = \arctan \frac{Z_C}{(1-e^2)\sqrt{X_C^2 + Y_C^2}} \Rightarrow \boxed{\varphi_C = 36^\circ 40' 50'' 70175 \text{ N}}$$

$$\lambda_C = \arctan \frac{Y_C}{X_C} \Rightarrow \boxed{\lambda_C = 005^\circ 23' 43'' 98162 \text{ W}}$$

6.- Se halla el *acimut*  $Z_C$  de la geodésica que parte de **P**, en el punto **C**, con (5-19) y (5-20):

$$(5-19) \quad \operatorname{sen}Z_C = \frac{N_P \cos \varphi_P \operatorname{sen}Z_{PC}}{N_C \cos \varphi_C} = -0,7041737515 \quad Z_C = -44^\circ 45' 46'' ,193$$

$$(5-20) \quad \operatorname{sen}Z_C < 0 \quad \rightarrow \quad Z_{PC} < 270^\circ \quad \rightarrow \quad Z_C = 180^\circ - Z_C \quad Z_C = 224^\circ 45' 46'' ,193$$

7.- Se calcula el *acimut inverso*  $Z_{CP}$ , mediante la sencilla operación:

$$(5-21) \quad Z_{CP} = Z_C \pm 180^\circ \Rightarrow \boxed{Z_{CP} = 44^\circ 45' 46'' ,193}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos*  $\Delta Z$ , mediante la expresión:

$$(5-22) \quad \Delta Z = Z_C - Z_{PC} \Rightarrow \boxed{\Delta Z = -0^\circ 14' 13'' 807}$$

### Cálculo de las coordenadas de D y $Z_{DP}$ .

1.- Los valores de la *primera* y *segunda excentricidad* del elipsoide  $e$  y  $e'$  serán los mismos que en los casos anteriores:

$$(2-6) \quad e^2 = 0,0066943800 \quad e'^2 = 0,0067394967$$

Los valores de  $N_P$  (2-13), y  $\rho_P$  (2-20) también son los mismos que en los mismos que en casos anteriores:

$$(2-13) \quad \begin{cases} W_P = 0,9987869746 \text{ m} \\ W_P^3 = 0,9963653363 \text{ m} \\ N_P = 6.385.883,239 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2-20) \quad \rho_P = 6.358.550,520 \text{ m}$$

El valor de  $R_{Z(PD)}$  (2-33), se obtiene de forma similar que en los casos anteriores, y ha de coincidir con ellos:

$$(2-33) \quad R_{Z(PD)} = \frac{N_P \rho_P}{\rho_P \operatorname{sen}^2 Z_{PD} + N_P \operatorname{cos}^2 Z_{PD}} \quad R_{z(PD)} = 6.372.187,570 \text{ m}$$

**2.-** Con estos valores, más el acimut  $Z_{PD}$ , la distancia  $s$  y la latitud  $\varphi_P$ , se determinan las componentes del vector  $P\vec{D}_{(t)}$  referidas al *sistema de las direcciones principales* de **P**:

$$(5-14) \quad P\vec{D}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \cdot \operatorname{cos} Z_{PD} - \frac{s^3 \operatorname{cos} Z_{PD}}{6R_{Z(PD)}\rho_P} + \dots \\ s \cdot \operatorname{sen} Z_{PD} - \frac{s^3 \operatorname{sen} Z_{PD}}{6R_{Z(PD)}N_P} + \dots \\ \frac{s^2}{2R_{Z(PD)}} - \frac{s^3}{4R_{Z(PD)}N_P} e^2 \operatorname{sen} 2\varphi_P \operatorname{cos} Z_{PD} + \dots \end{bmatrix} \quad P\vec{D}_{(t)} = \begin{bmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -35.354,975 \\ -35.354,977 \\ 196,168 \end{bmatrix}$$

**3.-** Las coordenadas cartesianas de **P** se calculan a partir de  $(\varphi_P, \lambda_P)$  y  $h = 0$ , con (5-17), como en los casos anteriores:

$$(5-17) \quad P = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.080.586,104 \\ -444.493,688 \\ 3.817.393,160 \end{pmatrix}$$

**4.-** Se calculan las coordenadas cartesianas del punto **D** mediante la expresión (4-10):

$$(4-10) \quad \begin{pmatrix} X_D \\ Y_D \\ Z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}\varphi_P \operatorname{cos} \lambda_P & -\operatorname{sen}\lambda_P & -\operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{cos} \lambda_P \\ -\operatorname{sen}\varphi_P \operatorname{sen}\lambda_P & \operatorname{cos} \lambda_P & -\operatorname{cos} \varphi_P \operatorname{sen}\lambda_P \\ \operatorname{cos} \varphi_P & 0 & -\operatorname{sen}\varphi_P \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \\ z_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5.056.152,460 \\ -477.846,049 \\ 3.845.510,846 \end{pmatrix}$$

**5.-** Se obtienen las *coordenadas geodésicas* de **D**  $(\varphi_D, \lambda_D)$ , mediante las expresiones (5-18), a partir de las recién calculadas coordenadas cartesianas  $(X_D, Y_D, Z_D)$ :

$$\varphi_D = \arctan \frac{Z_D}{(1-e^2)\sqrt{X_D^2 + Y_D^2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi_D = 37^\circ 19' 04",45152 \text{ N}}$$

$$\lambda_D = \arctan \frac{Y_D}{X_D} \Rightarrow \boxed{\lambda_D = 005^\circ 23' 55'' 91307 W}$$

6.- Se halla el *acimut*  $Z_D$  de la geodésica que parte de **P**, en el punto **D**, con (5-19) y (5-20):

$$(5-19) \quad \text{sen} Z_D = \frac{N_P \cos \varphi_P \text{sen} Z_{PD}}{N_D \cos \varphi_D} = -0,7100738851 \quad Z_D = -45^\circ 14' 27'' ,338$$

$$(5-20) \quad \text{sen} Z_D < 0 \rightarrow Z_{PD} > 270^\circ \rightarrow Z_D = 360^\circ + Z_D \quad Z_D = 314^\circ 45' 32'' ,662$$

7.- Se calcula el acimut inverso  $Z_{DP}$ , mediante la sencilla operación:

$$(5-21) \quad Z_{DP} = Z_D \pm 180^\circ \Rightarrow \boxed{Z_{DP} = 134^\circ 45' 32'' ,662}$$

8.- Es posible hallar la *convergencia de meridianos*  $\Delta Z$ , mediante la expresión:

$$(5-22) \quad \Delta Z = Z_D - Z_{PD} \Rightarrow \boxed{\Delta Z = -0^\circ 14' 27'' ,338}$$

## EJERCICIO 5.4

### Cálculo de las coordenadas de A y $Z_{AP}$ .

1.- Se calculan las coordenadas ortogonales  $x$  e  $y$  aplicando (5-31) y (5-32). Para ello, antes se deben calcular: la *primera excentricidad*  $e$  (2-6),  $N_P$  (2-13) y  $\rho_P$  (2-20) para la latitud del punto **P**:

$$(2-6) \quad e^2 = f(2-f) = 0,0066943800$$

$$(2-13) \quad N_P = \frac{a}{W_P} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 \varphi_P}} = \frac{a}{\sqrt{1+f(f-2)\text{sen}^2 \varphi_P}} \quad \begin{cases} W_P = 0,9987869746 \text{ m} \\ W_P^3 = 0,9963653363 \text{ m} \\ N_P = 6.385.883,239 \text{ m} \end{cases}$$

$$(2-20) \quad \rho_P = \frac{a(1-e^2)}{W_P^3} = \frac{a(f^2-2f+1)}{W_P^3} \quad \rho_P = 6.358.550,520 \text{ m}$$

$$(5-31) \quad y = s \cos Z_{PA} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \text{sen}^2 Z_{PA} \right) \quad y = 35.355,702 \text{ m}$$



$$(5-32) \quad x = s \operatorname{sen} Z_{PA} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \cos^2 Z_{PA} \right) \quad x = 35.355,158 \text{ m}$$

**2.-** Una vez determinado el valor del arco  $y$ , se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que lo definen, en radianes, mediante la expresión (5-33):

$$(5-33) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_P \right) \quad \Delta\varphi_y = 0,0055603398$$

con este valor se calcula ,también en primera aproximación, la latitud del punto **Q** mediante la (5-34), con la que se puede calcular la latitud media  $\varphi_M$  entre **P** y **Q** para obtener un valor exacto de  $\Delta\varphi_y$  con la expresión (5-36), para lo que es necesario determinar  $\rho_M$  con la (5-35):

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6513321631 \quad \varphi_M = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0,6485519931$$

$$(5-35) \quad \rho_M = \frac{a(1-e^2)}{W_M^3} \quad \rho_M = 6.358.721,711 \text{ m}$$

$$(5-36) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_M \right) \quad \Delta\varphi_y = 0,0055601901$$

**3.-** Cálculo del ángulo  $\omega$  con la expresión (5-37). Para ello se debe calcular, antes, un nuevo valor más exacto para la latitud del punto **Q** (5-34), y con ella, el valor  $N_Q$  con (2-13):

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6513320134 = 37^\circ 3185754270$$

$$(2-13) \quad N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_Q}} \quad \begin{cases} W_Q = 0,9987690345 \text{ m} \\ W_Q^3 = 0,9963116473 \text{ m} \\ N_Q = 6.385.997,943 \text{ m} \end{cases}$$

$$(5-37) \quad \omega = \frac{x^2}{2 N_Q} \tan \varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 74,607 \text{ m}$$

**4.-** Una vez determinado el valor de  $\omega$ , se calcula, mediante (5-38), la diferencia de latitudes, en radianes,  $\Delta\varphi_\omega$  que define su arco. Para ello, antes se debe calcular  $\rho_Q$  mediante (2-20):

$$(2-20) \quad \rho_Q = \frac{a(1-e^2)}{W_Q^3} \quad \rho_Q = 6.358.893,168 \text{ m}$$

$$(5-38) \quad \Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{\omega^2}{a^2} \cos 2\varphi_Q \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0,0000117326$$

**5.-** Cálculo de la *Latitud* de **A**, aplicando la expresión (5-39). El valor de  $\Delta\varphi_y$ , es positivo por estar el punto **A** más al Norte que **P**. El valor de  $\Delta\varphi_\omega$  es siempre a restar:

$$(5-39) \quad \varphi_A = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0,6513320134 - 0,0000117326 \quad \boxed{\varphi_A = 37^\circ 19' 04",45151 \text{ N}}$$

**6.-** Cálculo de la *Longitud* de **A** mediante la expresión (5-41), para lo cual es necesario calcular previamente  $N_A$  mediante (2-13):

$$(2-13) \quad N_A = \frac{a}{W_A} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_A}} \quad N_A = 6.385.997,701 \text{ m}$$

$$(5-41) \quad \Delta\lambda = \arcsen \left[ \frac{1}{\cos \varphi_A} \sen \frac{x}{N_A} \right] \quad \Delta\lambda = 0,0069615030$$

$$\lambda_A = \lambda_P + \Delta\lambda = -0,0872664626 + 0,0069615030 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_A = 004^\circ 36' 04",08693 \text{ W}}$$

**7.-** Cálculo de la *convergencia de meridianos* mediante la expresión (5-42), para lo cual se deben calcular previamente las *latitudes reducidas* de **P** y **A** (2-53), así como el incremento de longitud  $\Delta\lambda'$  sobre la *Esfera de Jacobi* (5-13):

$$(2-53) \quad \cos \beta_P = \frac{1}{w_P} \cos \varphi_P = 0,7996054518 \quad \beta_P = 0,6441584012$$

$$(2-53) \quad \cos \beta_A = \frac{1}{w_A} \cos \varphi_A = 0,7962642326 \quad \beta_A = 0,6497017952$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_A}{2} = 0,6469300982 \quad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_A}{2} = -0,0027716970$$

$$(5-13) \quad d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1 - e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1 - e^2}} d\lambda \quad d\lambda' = 0,0069763868$$

$$(5-42) \quad \tan \frac{\Delta Z}{2} = \frac{\sen \beta_M}{\cos \frac{\Delta\beta}{2}} \tan \frac{\Delta\lambda'}{2} = 0,0021024891 \quad \boxed{\Delta Z = 0^\circ 14' 27",338}$$

**8.-** Cálculo del *acimut inverso*  $Z_{AP}$  mediante la expresión (5-43):

$$(5-43) \quad Z_{AP} = \Delta Z + Z_{PA} + 180^\circ = 0^\circ 14' 27",338 + 45^\circ + 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{AP} = 225^\circ 14' 27",338}$$

### Cálculo de las coordenadas de B y $Z_{BP}$ .

Resumiendo los pasos indicados en el apartado anterior y aprovechando cálculos efectuados:

1.- Se calculan las coordenadas ortogonales  $x$  e  $y$ :

$$(5-31) \quad y = s \cos Z_{PB} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \operatorname{sen}^2 Z_{PB} \right) \quad y = -35.355,702 \text{ m}$$

$$(5-32) \quad x = s \operatorname{sen} Z_{PB} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \cos^2 Z_{PB} \right) \quad x = 35.355,158 \text{ m}$$

2.- se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco  $y$ :

$$(5-33) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_P \right) \quad \Delta\varphi_y = -0,0055603398$$

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6402114834 \quad \varphi_M = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0,6429916533$$

$$(5-35) \quad \rho_M = \frac{a(1-e^2)}{W_M^3} \quad \rho_M = 6.358.379,610 \text{ m}$$

$$(5-36) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_M \right) \quad \Delta\varphi_y = -0,0055604893$$

3.- Cálculo del ángulo  $\omega$  :

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6402113340 = 36,6814074327$$

$$(2-13) \quad N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_Q}} \quad \begin{cases} W_Q = 0,9988048582 \text{ m} \\ W_Q^3 = 0,9964188581 \text{ m} \\ N_Q = 6.385.768,899 \text{ m} \end{cases}$$

$$(5-37) \quad \omega = \frac{x^2}{2 N_Q} \tan \varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 72,903 \text{ m}$$

4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco  $\omega$ :

$$(2-20) \quad \rho_Q = \frac{a(1-e^2)}{W_Q^3} \quad \rho_Q = 6.358.208,976 \text{ m}$$

$$(5-38) \quad \Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{\omega^2}{a^2} \cos 2\varphi_Q \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0,0000114659$$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **B**. El valor de  $\Delta\varphi_y$ , es negativo por estar **B** más al Sur que **P**. El valor de  $\Delta\varphi_\omega$  es siempre a restar:

$$(5-39) \quad \varphi_B = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0,6402113340 - 0,0000114659 \quad \boxed{\varphi_B = 36^\circ 40' 50'' 70174 \text{ N}}$$

**6.- Cálculo de la Longitud de B:**

$$(2-13) \quad N_B = \frac{a}{W_B} = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi_B}} \quad N_B = 6.385.768,664 \text{ m}$$

$$(5-41) \quad \Delta\lambda = \operatorname{arcsen} \left[ \frac{1}{\cos \varphi_B} \operatorname{sen} \frac{x}{N_B} \right] \quad \Delta\lambda = 0,0069036577$$

$$\lambda_B = \lambda_P + \Delta\lambda = -0,0872664626 + 0,0069036577 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_B = 004^\circ 36' 16'' 01838 \text{ W}}$$

**7.- Cálculo de la convergencia de meridianos:**

$$(2-53) \quad \cos \beta_B = \frac{1}{w_B} \cos \varphi_B = 0,8029359743 \quad \beta_B = 0,6385917305$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_B}{2} = 0,6413750659 \quad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_B}{2} = -0,0027833353$$

$$(5-13) \quad d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1 - e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1 - e^2}} d\lambda \quad d\lambda' = 0,0069185419$$

$$(5-42) \quad \tan \frac{\Delta Z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \beta_M}{\cos \frac{\Delta\beta}{2}} \tan \frac{\Delta\lambda'}{2} = 0,0020696905 \quad \boxed{\Delta Z = 0^\circ 14' 13'' 807}$$

**8.- Cálculo del acimut inverso  $Z_{BP}$ :**

$$(5-43) \quad Z_{BP} = \Delta Z + Z_{PB} + 180^\circ = 0^\circ 14' 13'' 807 + 135^\circ + 180^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{BP} = 315^\circ 14' 13'' 807}$$

**Cálculo de las coordenadas de C y  $Z_{CP}$ :**

$$(5-31) \quad y = s \cos Z_{PC} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \operatorname{sen}^2 Z_{PC} \right) \quad y = -35.355,702 \text{ m}$$

$$(5-32) \quad x = s \operatorname{sen} Z_{PC} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \cos^2 Z_{PC} \right) \quad x = -35.355,158 \text{ m}$$

**2.-** se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco  $y$ :

$$(5-33) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_P \right) \quad \Delta\varphi_y = -0,0055603398$$

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6402114834 \quad \varphi_M = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0,6429916533$$

$$(5-35) \quad \rho_M = \frac{a(1-e^2)}{W_M^3} \quad \rho_M = 6.358.379,610 \text{ m}$$

$$(5-36) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_M \right) \quad \Delta\varphi_y = -0,0055604893$$

**3.- Cálculo del ángulo  $\omega$  :**

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6402113340 = 36,6814074327$$

$$(2-13) \quad N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_Q}} \quad \begin{cases} W_Q = 0,9988048582 \text{ m} \\ W_Q^3 = 0,9964188581 \text{ m} \\ N_Q = 6.385.768,899 \text{ m} \end{cases}$$

$$(5-37) \quad \omega = \frac{x^2}{2 N_Q} \tan \varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 72,903 \text{ m}$$

**4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco  $\omega$ :**

$$(2-20) \quad \rho_Q = \frac{a(1-e^2)}{W_Q^3} \quad \rho_Q = 6.358.208,976 \text{ m}$$

$$(5-38) \quad \Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{\omega^2}{a^2} \cos 2\varphi_Q \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0,0000114659$$

**5.- Cálculo de la *Latitud* de **C**.** El valor de  $\Delta\varphi_y$ , es negativo por estar **C** más al Sur que **P**. El valor de  $\Delta\varphi_\omega$  es siempre a restar:

$$(5-39) \quad \varphi_C = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0,6402113340 - 0,0000114659 \quad \boxed{\varphi_C = 36^\circ 40' 50,70174 \text{ N}}$$

**6.- Cálculo de la *Longitud* de **C**:**

$$(2-13) \quad N_C = \frac{a}{W_C} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi_C}} \quad N_C = 6.385.768,664 \text{ m}$$

$$(5-41) \quad \Delta\lambda = \arcsen \left[ \frac{1}{\cos \varphi_C} \sen \frac{x}{N_C} \right] \quad \Delta\lambda = -0,0069036577$$

$$\lambda_C = \lambda_P + \Delta\lambda = -0,0872664626 - 0,0069036577 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_C = 005^\circ 23' 43,98162 \text{ W}}$$

**7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos*:**

$$(2-53) \quad \cos \beta_C = \frac{1}{w_C} \cos \varphi_C = 0,8029359743 \quad \beta_C = 0,6385917305$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_C}{2} = 0,6413750659 \quad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_C}{2} = -0,0027833353$$

$$(5-13) \quad d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda \quad d\lambda' = -0,0069185419$$

$$(5-42) \quad \tan \frac{\Delta Z}{2} = \frac{\text{sen} \beta_M}{\cos \frac{\Delta\beta}{2}} \tan \frac{\Delta\lambda'}{2} = -0,0020696905 \quad \boxed{\Delta Z = -0^\circ 14' 13,807''}$$

**8.- Cálculo del acimut inverso  $Z_{CP}$ :**

$$(5-43) \quad Z_{CP} = \Delta Z + Z_{PC} + 180^\circ = -0^\circ 14' 13,807'' + 225^\circ + 180^\circ \Rightarrow \boxed{Z_{CP} = 44^\circ 45' 46,193''}$$

**Cálculo de las coordenadas de D y  $Z_{PD}$ .**

$$(5-31) \quad y = s \cos Z_{PD} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \text{sen}^2 Z_{PD} \right) \quad y = 35.355,702 \text{ m}$$

$$(5-32) \quad x = s \text{sen} Z_{PD} \left( 1 - \frac{1}{6} \frac{s^2}{N_P \rho_P} \cos^2 Z_{PD} \right) \quad x = -35.355,158 \text{ m}$$

**2.- se calcula, en primera aproximación, la diferencia de latitudes que definen el arco  $y$ :**

$$(5-33) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_P} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_P \right) \quad \Delta\varphi_y = 0,0055603398$$

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6513321631 \quad \varphi_M = \frac{\varphi_P + \varphi_Q}{2} = 0,6485519931$$

$$(5-35) \quad \rho_M = \frac{a(1-e^2)}{W_M^3} \quad \rho_M = 6.358.721,711 \text{ m}$$

$$(5-36) \quad \Delta\varphi_y = \frac{y}{\rho_M} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{y^2}{a^2} \cos 2\varphi_M \right) \quad \Delta\varphi_y = 0,0055601901$$

**3.- Cálculo del ángulo  $\omega$  :**

$$(5-34) \quad \varphi_Q = \varphi_P + \Delta\varphi_y = 0,6513320134 = 37^\circ 31' 85,754270''$$

$$(2-13) \quad N_Q = \frac{a}{W_Q} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_Q}} \quad \begin{cases} W_Q = 0,9987690345 \text{ m} \\ W_Q^3 = 0,9963116473 \text{ m} \\ N_Q = 6.385.997,943 \text{ m} \end{cases}$$

$$(5-37) \quad \omega = \frac{x^2}{2 N_Q} \tan \varphi_Q \quad \Rightarrow \quad \omega = 74,607 \text{ m}$$

4.- se calcula la diferencia de latitudes que define el arco  $\omega$ :

$$(2-20) \quad \rho_Q = \frac{a(1-e^2)}{W_Q^3} \quad \rho_Q = 6.358.893,168 \text{ m}$$

$$(5-38) \quad \Delta\varphi_\omega = \frac{\omega}{\rho_Q} \left( 1 - \frac{e^2}{8} \frac{\omega^2}{a^2} \cos 2\varphi_Q \right) \quad \Rightarrow \quad \Delta\varphi_\omega = 0,0000117326$$

5.- Cálculo de la *Latitud* de **D**. El valor de  $\Delta\varphi_y$ , es negativo por estar **D** más al Norte que **P**. El valor de  $\Delta\varphi_\omega$  es siempre a restar:

$$(5-39) \quad \varphi_D = \varphi_P + \Delta\varphi_y - \Delta\varphi_\omega = \varphi_Q - \Delta\varphi_\omega = 0,6513320134 - 0,0000117326 \quad \boxed{\varphi_D = 37^\circ 19' 04,45151 \text{ N}}$$

6.- Cálculo de la *Longitud* de **D**:

$$(2-13) \quad N_D = \frac{a}{W_D} = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \operatorname{sen}^2 \varphi_D}} \quad N_D = 6.385.997,701 \text{ m}$$

$$(5-41) \quad \Delta\lambda = \operatorname{arcsen} \left[ \frac{l}{\cos \varphi_D} \operatorname{sen} \frac{x}{N_D} \right] \quad \Delta\lambda = -0,0069615030$$

$$\lambda_D = \lambda_P + \Delta\lambda = -0,0872664626 - 0,0069615030 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda_D = 005^\circ 23' 55,91307 \text{ W}}$$

7.- Cálculo de la *convergencia de meridianos*:

$$(2-53) \quad \cos \beta_D = \frac{l}{w_D} \cos \varphi_D = 0,7962642326 \quad \beta_D = 0,6497017952$$

$$\beta_M = \frac{\beta_P + \beta_D}{2} = 0,6469300982 \quad \frac{\Delta\beta}{2} = \frac{\beta_P - \beta_D}{2} = -0,0027716970$$

$$(5-13) \quad d\lambda' = \frac{w}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda = \frac{w_M}{\sqrt{1-e^2}} d\lambda \quad d\lambda' = -0,0069763868$$

$$(5-42) \quad \tan \frac{\Delta Z}{2} = \frac{\operatorname{sen} \beta_M}{\cos \frac{\Delta\beta}{2}} \tan \frac{\Delta\lambda'}{2} = -0,0021024891 \quad \boxed{\Delta Z = -0^\circ 14' 27,338}$$

8.- Cálculo del *acimut inverso*  $Z_{DP}$ :

$$(5-43) \quad Z_{DP} = \Delta Z + Z_{PD} + 180^\circ = -0^\circ 14' 27''{,}338 + 315^\circ + 180^\circ \Rightarrow \boxed{Z_{DP} = 134^\circ 45' 32''{,}662}$$

### **EJERCICIO 5.5**

**En preparación**