

TEMA 4.- SISTEMAS DE COORDENADAS EN GEODESIA

EJERCICIO 4.1

las coordenadas del astro, expresadas según la referencia cartesiana son:

$$\left. \begin{array}{l} z = 30^\circ \\ A_a = 25^\circ \end{array} \right\} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} z \operatorname{sen} A_a \\ \operatorname{sen} z \cos A_a \\ \cos z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 25^\circ \\ \operatorname{sen} 30^\circ \cos 25^\circ \\ \cos 30^\circ \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2113091309 \\ 0,4531538935 \\ 0,8660254038 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4.2

$$A \begin{cases} \varphi = 40^\circ N \\ \lambda = 06^\circ W \\ h = 200m \end{cases} \quad B \begin{cases} \varphi = 40^\circ N \\ \lambda = 03^\circ E \\ h = 200m \end{cases}$$

$$N_A = N_B = \frac{a}{w} = \frac{a}{\sqrt{1 - f(2 - f) \operatorname{sen}^2 \varphi}} = \left. \begin{array}{l} a = 6.387.388 \\ f = 1 / 297 \\ \varphi_A = \varphi_B = 40^\circ \end{array} \right\} = \frac{6.378.388 \text{ m}}{\sqrt{1 - \frac{1}{297} \left(2 - \frac{1}{297} \right) \operatorname{sen}^2 40^\circ}} = 6.387.264,947 \text{ m}$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \\ (N(1 - e^2) + h) \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (N + h) \cos \varphi \cos \lambda \\ (N + h) \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \\ (N(1 - f(2 - f)) + h) \operatorname{sen} \varphi \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} (6.387.264,949 + 200) \cos 40^\circ \cos (-6^\circ) \\ (6.387.264,949 + 200) \cos 40^\circ \operatorname{sen} (-6^\circ) \\ \left(6.387.264,949 \left(1 - \frac{1}{297} \left(2 - \frac{1}{297} \right) \right) + 200 \right) \operatorname{sen} 40^\circ \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{A = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.866.277,213 \text{ m} \\ -511.466,345 \text{ m} \\ 4.078.182,363 \text{ m} \end{pmatrix}}$$

$$B = \begin{pmatrix} (6.387.264,949 + 200) \cos 40^\circ \cos (3^\circ) \\ (6.387.264,949 + 200) \cos 40^\circ \operatorname{sen} (3^\circ) \\ \left(6.387.264,949 \left(1 - \frac{1}{297} \left(2 - \frac{1}{297} \right) \right) + 200 \right) \operatorname{sen} 40^\circ \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{B = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.866.277,229 \text{ m} \\ 256.084,127 \text{ m} \\ 4.078.182,363 \text{ m} \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 4.3

$$(2-6): e^2 = f(2-f) \quad (4-4): \varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right)^{-1} \quad (4-3): h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$a = 6.378.137 \quad f = 0,003352810665 \quad e^2 = 0,006694379990 \quad 1-e^2 = 0,993305620010$$

con $h=0$ en (4-4): $\tan \varphi_1 = 0,93869507669725 \quad \varphi_1 = 43^\circ 11' 19'',719392 \quad N_1 = 6388160,5845517$
 con (4-3): $h_1 = 219,260531$

con (4-4): $\tan \varphi_2 = 0,93869485956634 \quad \varphi_2 = 43^\circ 11' 19'',695584 \quad N_2 = 6388160,5820808$
 con (4-3): $h_2 = 218,568359$

con (4-4): $\tan \varphi_3 = 0,93869486025177 \quad \varphi_3 = 43^\circ 11' 19'',695660 \quad N_3 = 6388160,5820886$
 con (4-3): $h_3 = 218,573015$

con (4-4): $\tan \varphi_4 = 0,93869486024716 \quad \varphi_4 = 43^\circ 11' 19'',695659 \quad N_4 = 6388160,5820885$
 con (4-3): $h_4 = 218,572993$

Las *latitudes* φ_3 y φ_4 se diferencian en menos de una cienmilésima, por tanto, la *latitud* buscada será:

$$\varphi = 43^\circ 28' 19'',69566 \text{ N}$$

Las alturas h_4 y h_3 se diferencian en menos de un milímetro, por tanto, la altura buscada será:

$$h = 218,573 \text{ m}$$

El cálculo de la *longitud* es inmediato mediante la expresión (4-5), obteniéndose hacia el W por ser la coordenada Y negativa:

con (4-5): $\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad \lambda = -8,48089522471746 \quad \lambda = 8^\circ 28' 51'',22281 \text{ W}$

EJERCICIO 4.4

$$(2-6): e^2 = f(2-f) \quad (4-4): \varphi = \arctan \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \left(1 - e^2 \frac{N}{N+h}\right)^{-1} \quad (4-3): h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \varphi} - N$$

$$a = 6.378.388 \quad f = 0,003367003367 \quad e^2 = 0,006722670022 \quad 1-e^2 = 0,993277329978$$

con $h=0$ en (4-4): $\tan \varphi_1 = 0,93873073239634 \quad \varphi_1 = 43^\circ 11' 23'',628911 \quad N_1 = 6388454,8475366$
 con (4-3): $h_1 = 123,583155$

con (4-4): $\tan \varphi_2 = 0,93873060949197 \quad \varphi_2 = 43^\circ 11' 23'',615435 \quad N_2 = 6388454,8461320$
 con (4-3): $h_2 = 123,191347$

con (4-4): $\tan \varphi_3 = 0,93873060988162 \quad \varphi_3 = 43^\circ 11' 23'',615478 \quad N_3 = 6388454,8461365$
 con (4-3): $h_3 = 123,193993$

con (4-4): $\tan \varphi_4 = 0,93873060987899 \quad \varphi_4 = 43^\circ 11' 23'',615478 \quad N_4 = 6388454,8461364$
 con (4-3): $h_4 = 123,193981$

Las *latitudes* φ_3 y φ_4 se diferencian en menos de una cienmilésima, por tanto, la *latitud* buscada será:

$$\varphi = 43^\circ 28' 23'',61548 N$$

Las alturas h_4 y h_3 se diferencian en menos de un milímetro, por tanto, la altura buscada será:

$$h = 123,194 m$$

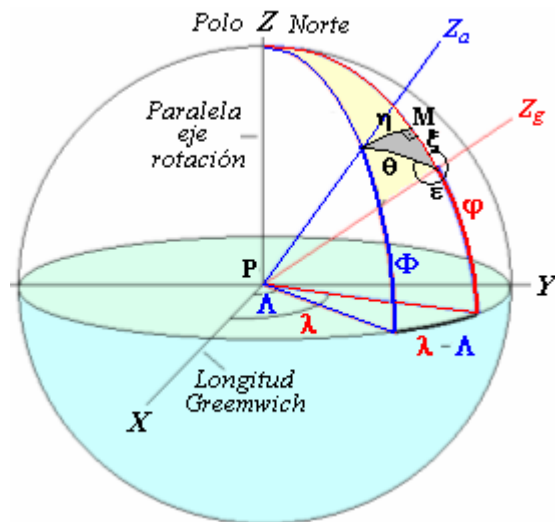
El cálculo de la *longitud* es inmediato mediante la expresión (4-5), obteniéndose hacia el *W* por ser la coordenada *Y* negativa:

con (4-5): $\lambda = \arctan \frac{Y}{X} \quad \lambda = -8,47941360264724 \quad \lambda = 8^\circ 28' 45'',88897 W$

EJERCICIO 4.5

Coordenadas geodésicas $\left\{ \begin{array}{l} \varphi = 36^\circ 53' 24,586'' N \\ \lambda = 02^\circ 23' 17,481'' W \end{array} \right.$ Coordenadas astronómicas $\left\{ \begin{array}{l} \Phi = 36^\circ 53' 25,095'' N \\ \Lambda = 02^\circ 23' 18,631'' W \end{array} \right.$

Por la situación relativa de Z_a respecto Z_g a se deducen los siguientes signos para η y ξ :



De acuerdo al convenio de signos (pag. 84) han de ser:

$\eta \rightarrow$ negativo
 $\xi \rightarrow$ positivo

La primera componente η de la desviación de la vertical tiene como valor:

$$\eta = \Delta\lambda \cos \Phi = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\lambda = 1'',15 \\ \Phi = 36^\circ 53' 25'',095 \end{array} \right.$$

$\eta = 0,000004459 \text{ rad}$

$$\eta = -0'',91975$$

La segunda componente ξ de la desviación de la vertical tiene como valor:

$$\xi = \Delta\varphi = \{\Delta\varphi = \Phi - \varphi\} = 0,000002468 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\xi = + 0,509''}$$

Para calcular el valor del ángulo de la desviación de la vertical se empleará la siguiente expresión que emplea sus componentes ya calculadas:

$$\theta = \sqrt{\eta^2 + \xi^2} = \sqrt{0,000004459^2 + 0,000002468^2} = 0,000005096 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta = 1,05120''}$$

EJERCICIO 4.6

Se pide calcular el ángulo ε y la diferencia $A_{GL}-A_G$, para lo que se dan como datos $A_A = 275^\circ 46' 39,78''$ y $A_G = 275^\circ 46' 39,80''$.

Para calcular el valor del acimut geodésico ε del plano en el que se mide el ángulo de la desviación de la vertical se empleará la expresión (4-17) y se tendrá en cuenta el convenio de signos de la pag. 84:

$$(4-17) \quad \varepsilon = \arctan \frac{\eta}{\xi} = \arctan \frac{-0,000004459}{0,000002468} = -1,065339815 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon = 298^\circ 57' 37,89''}$$

Para calcular el *acimut geodésico de Laplace* A_{GL} se empleará la expresión (4-24):

$$(4-24) \quad A_{GL} = A_A - (\lambda - \lambda') \operatorname{sen} \Phi = 275^\circ 46' 39,78'' - (1,15'') \operatorname{sen}(36^\circ 53' 25,095'') = 275^\circ 46' 39,09''$$

este acimut es el que debe compararse con el A_G calculado a través de los datos obtenidos mediante la triangulación:

$$\text{Desorientación} = A_{GL} - A_A = 275^\circ 46' 39,09'' - 275^\circ 46' 39,80'' \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Desorientación} = -00,71''}$$