TEMA 3.- POTENCIAL DE LA GRAVEDAD. GEOIDE

EJERCICIO 3.1

La expresión que define el campo de fuerzas de la fuerza de atracción es:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \vec{r}$$

el vector de posición $\vec{r}$, y su módulo, quedan definidos por las siguientes expresiones:

$$\vec{r} = (x, y, z) \qquad\qquad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

por tanto, el campo de fuerzas de atracción de la masa M de la Tierra sobre la unidad de masa, se puede expresar de la forma siguiente:

$$\vec{F} = -G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} (x, y, z)$$

calculemos el rotacional de este campo de fuerzas:

$$rot\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} x & -G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} y & -G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} z \end{vmatrix}$$

este rotacional es cero, ya que se anulan cada uno de los valores de las componentes $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ al ser iguales las derivadas cruzadas de cada una de ellas. Comprobémoslo con la componente $\vec{i}$:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[-G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} z\right] = -G \cdot M \cdot z \left[-\frac{3}{2} 2y \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3}\right] = 3\,G\,M\;y\,z \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[-G \cdot M \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3/2} y\right] = -G \cdot M \cdot y \left[-\frac{3}{2} 2z \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3}\right] = 3\,G\,M\;y\,z \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-3}$$

Por tanto, el determinante es cero, y así, el rotacional, por lo que queda demostrado que el campo de fuerzas de atracción es irrotacional.

EJERCICIO 3.2

La expresión del potencial V es la siguiente:

$$V = G\frac{M}{r} = G\,M\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}$$

para demostrar que el campo de fuerzas de la fuerza de atracción procede de este potencial bastará demostrar que se verifica: $\vec{F} = \nabla V$. En efecto:

$$\nabla V = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = GM\,\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -GM\left[-\frac{1}{2}2x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] = -GM\,x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} = -GM\,xr^{-3}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = GM\,\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -GM\left[-\frac{1}{2}2y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] = -GM\,y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} = -GM\,yr^{-3}$$

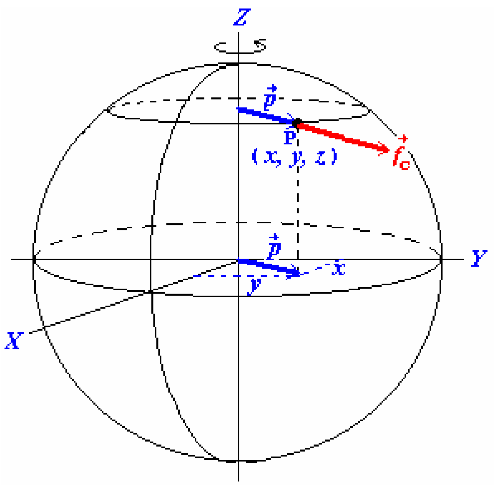
$$\frac{\partial V}{\partial z} = GM\,\frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = -GM\left[-\frac{1}{2}2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\right] = -GM\,z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} = -GM\,zr^{-3}$$

$$\nabla V = -GM\,xr^{-3}\,\vec{i} - GM\,yr^{-3}\,\vec{j} - GM\,zr^{-3}\,\vec{k} = -GM\,r^{-3}\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}\right) = -G\frac{M}{r^3}\vec{r} = \vec{F}$$

EJERCICIO 3.3

La expresión que define el campo de fuerzas de la fuerza centrífuga es:

$$\vec{f_c} = \omega^2\,p\frac{\vec{p}}{|\vec{p}|} = \omega^2\,\vec{p} = \omega^2(x, y, o) \qquad donde:\ |\vec{p}| = \sqrt{x^2+y^2}$$



calculemos el rotacional de este campo de fuerzas:

$$rot\,\vec{f_c} = \nabla \times \vec{f_c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega^2 x & \omega^2 x & 0 \end{vmatrix}$$

$$rot\,\vec{f_c} = \nabla \times \vec{f_c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega^2 x & \omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} \omega^2 y, -\frac{\partial}{\partial x} 0 + \frac{\partial}{\partial z} \omega^2 x, \frac{\partial}{\partial x} \omega^2 y - \frac{\partial}{\partial y} \omega^2 x \right) = 0$$

Por tanto, al ser nulo su rotacional, queda demostrado que el campo de fuerzas de fuerza centrífuga es irrotacional.

EJERCICIO 3.4

La expresión que da el potencial Φ es:

$$\Phi = \frac{1}{2}\omega^2\left(x^2 + y^2\right)$$

para demostrar que el campo de fuerzas de la fuerza centrífuga procede de este potencial bastará demostrar que se verifica: $\vec{f_c} = \nabla\Phi$. En efecto:

$$\nabla\,\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k} = \omega^2 x\,\vec{i} + \omega^2 y\,\vec{j} + 0 = \omega^2\left(x\,\vec{i} + y\,\vec{j}\right) = \omega^2\,\vec{p} = \vec{f_c}$$

EJERCICIO 3.5

Por tratarse de un receptor GPS, en principio, la altura ofrecida ha de ser una altura elipsoidal, por tanto, la altura elipsoidal del punto de observación es 58,7 m.

$h = 58{,}7\ m$

$N_{WGS84} = 45{,}4\ m$ $\qquad h = H + N,$ $\qquad H = h - N = 58{,}7 - 45{,}4$ $\qquad \boxed{H = 13{,}3\ m}$

$N_{Int} = -45\ m$

EJERCICIO 3.6

Para calcular la gravedad normal se empleará la *fórmula de Clairaut*:

$$\gamma_0 = \gamma_e\left(1 + \beta\,sen^2\varphi - \beta_1 sen^2\,2\varphi\right)$$ en la que son: $$\beta = \frac{5\omega^2 a}{2\gamma_e} - f$$ y $$\beta_1 = \frac{1}{8}f^2 + \frac{1}{4}f\beta$$

$$\beta = \frac{5\omega^2 a}{2\gamma_e} - f = \frac{5\cdot\left(0{,}72921151\cdot 10^{-4}\right)\cdot 6.378.388}{2\cdot 978{,}049} - \frac{1}{297} = 0{,}005302563$$

$$\beta_1 = \frac{1}{8} f^2 + \frac{1}{4} f\beta = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{297}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{1}{297} 0{,}005302562677 = 0{,}00000588$$

$$\gamma_0 = \gamma_e \left(1 + \beta\, sen^2 \varphi - \beta_1 sen^2 2\varphi\right) = 9{,}78049 \left(1 + 0{,}005302563 \;\; sen^2 37^o - 0{,}000005881 \;\; sen^2 74^o\right) \quad m / seg^2$$

$$\boxed{\gamma_0 = 979{,}916986 \quad gal}$$